28. Вывести одномерное уравнение Фоккера–Планка для марковского процесса диффузионного типа из уравнения Смолуховского.

База – уравнение Смолуховского:

$$\rho(x_0 \to x \text{ за } t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x_0 \to x^I \text{ за } t)\rho(x^I \to x \text{ за } \Delta t)\, dx^I$$

и вот такие синие условия:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^I - x)^1}{\Delta t} * \rho(x \to x^I \text{ за } \Delta t\,)\, dx^I = A(x)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^I - x)^2}{\Delta t} * \rho(x \to x^I \text{ за } \Delta t\,)\, dx^I = 2B(x)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^I - x)^k}{\Delta t} * \rho(x \to x^I \text{ за } \Delta t\,)\, dx^I = 0, \text{если } k > 2$$

И то, и то нам придётся немного преобразовать для удобной подстановки в доказательство.

Начнём с уравнения Смолуховского.

Нам будет удобно переобозначить x и x^I, поменяв их местами:

$$\rho(x_0 \to x^I \text{ за } t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x_0 \to x \text{ за } t)\rho(x \to x^I \text{ за } \Delta t)\, dx$$

И подставим $\Delta t = 0$:

$$\rho(x_0 \to x^I \text{ за } t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x_0 \to x \text{ за } t)\rho(x \to x^I \text{ за } 0)\, dx$$

Ежели вычесть одно из другого, то получим

$$\rho(x_0 \to x^I \text{ за } t + \Delta t) - \rho(x_0 \to x^I \text{ за } t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x_0 \to x \text{ за } t)\big(\rho(x \to x^I \text{ за } \Delta t) - \rho(x \to x^I \text{ за } 0)\big)dx$$

И на Δt поделим:

$$\frac{\rho(x_0 \to x^I \text{ за } t + \Delta t) - \rho(x_0 \to x^I \text{ за } t)}{\Delta t} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x_0 \to x \text{ за } t)\big(\rho(x \to x^I \text{ за } \Delta t) - \rho(x \to x^I \text{ за } 0)\big)dx}{\Delta t}$$

Назовём данный результат зелёным ☺

Теперь перейдём к синим условиям.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^I - x)^1}{\Delta t} * \rho(x \to x^I \text{ за } \Delta t\,)\, dx^I = A(x)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^I-x)^2}{\Delta t}*\rho(x\to x^I \text{ за } \Delta t\,)\,dx^I = 2B(x)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^I-x)^k}{\Delta t}*\rho(x\to x^I \text{ за } \Delta t\,)\,dx^I = 0, \text{если } k>2$$

Перепишем их как

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x^I-x)^1\frac{\rho(x\to x^I \text{ за } \Delta t\,)-\rho(x\to x^I \text{ за } 0\,)}{\Delta t} = A(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x^I-x)^2\frac{\rho(x\to x^I \text{ за } \Delta t\,)-\rho(x\to x^I \text{ за } 0\,)}{\Delta t} = 2B(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x^I-x)^k\frac{\rho(x\to x^I \text{ за } \Delta t\,)-\rho(x\to x^I \text{ за } 0\,)}{\Delta t} = 0, \text{если } k>2$$

Пусть F(x) – какая-то функция. Разложим её в точке x^I в ряд Тейлора:

$$F(x^I) = F(x) + (x-x^I)F^I(x) + \frac{(x-x^I)^2}{2}F^{II}(x) + \cdots$$

А теперь зададимся целью подсчитать вот такой интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(x^I)\,dx^I * \frac{\rho(x\to x^I \text{ за } \Delta t)-\rho(x\to x^I \text{ за } 0)}{\Delta t}$$

Разложим $F(x^I)$ в ряд Тейлора и воспользуемся синими условиями. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(x^I)\,dx^I * \frac{\rho(x\to x^I \text{ за } \Delta t)-\rho(x\to x^I \text{ за } 0)}{\Delta t}$$
$$= F(x) + F^I(x)A(x) + F^{II}(x)*B(x)$$

Назовём этот результат фиолетовым.

Теперь мы готовы приступить к доказательству.

Пусть F(x) – какая-то функция

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}F(x^I)\rho(x_0\to x^I \text{ за } t)\,dx^I$$

Возьмём производную по времени:

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty}F(x^I)\frac{\partial\rho(x_0\to x^I \text{ за } t)}{\partial t}dx^I$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}F(x^I)\frac{\rho(x_0\to x^I \text{ за } t+\Delta t)-\rho(x_0\to x^I \text{ за } t)}{\Delta t}dx^I$$

Подставим зелёный результат:

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x^I)\, dx^I * \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x_0 \to x \text{ за } t)\big(\rho(x \to x^I \text{ за } \Delta t) - \rho(x \to x^I \text{ за } 0)\big) dx}{\Delta t}$$

Немного поперекидываем множители между интегралами:

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x_0 \to x \text{ за } t)\, dx * \int_{-\infty}^{+\infty} F(x^I)\, dx^I * \frac{\rho(x \to x^I \text{ за } \Delta t) - \rho(x \to x^I \text{ за } 0)}{\Delta t}$$

А второй интеграл мы уже считали – это фиолетовый результат.

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x_0 \to x \text{ за } t)\, dx * \big(F(x) + F^I(x)A(x) + F^{II}(x) * B(x)\big)$$

Давайте даже $\rho(x_0 \to x \text{ за } t)$ перепишем как $\rho(x,t)$ – как в Фоккере-Планке:

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,t)\, dx * \big(F(x) + F^I(x)A(x) + F^{II}(x) * B(x)\big)$$

Далее начинается унылая процедура. Нам нужно получить выражение вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\left(\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}A(x)\rho(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}B(x)\rho(x,t)\right) dx = 0$$

Чтобы затем сказать, что если это верно для любой $F(x)$, то необходимо и достаточно

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}A(x)\rho(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}B(x)\rho(x,t) = 0$$

Это достигается взятием интеграла по частям – однократным для первой производной и двукратным для второй.

Подставляя $A(x)$ и $B(x)$, получаем заветное уравнение Фокера-Планка:

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \frac{\theta}{\gamma}\frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho(x,t)\frac{\partial U(x)}{\partial x}\right) = 0$$